



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Științe Matematice din România,

Filiala Caraș - Severin



ONM, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 07.02.2026

Clasa a X-a

○Timp de lucru: 180 de minute. ○ Din oficiu se acordă 10 puncte.

**Problema 1. (22 de puncte)**

Demonstrați că, dacă  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$  astfel încât  $2^x = 60, 3^y = 40, 4^z = 30$  și  $5^t = 24$ ,

atunci numărul  $A = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+t}$  este rațional.

(Supliment GM 11/2025)

**Problema 2. (22 de puncte)**

Demonstrați că șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $a_1 = \sqrt[3]{6}$  și  $a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n}, \forall n \geq 1$ , este monoton și mărginit.

(Supliment GM 10/2025)

**Problema 3 (23 de puncte)**

(a) Dați un exemplu de mulțimi infinite  $A, B \subset \mathbb{R}, B \neq \mathbb{R}$ , astfel încât funcția

$f: A \rightarrow B, f(x) = x^2 - 4x + 3$  să fie injectivă, dar să nu fie surjectivă.

(b) Arătați că funcția  $g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{N}, g(x) = [\log_x 3] - [\log_x 2]$  este surjectivă.

( $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .)

(Supliment GM 9/2025, enunț ușor modificat)

**Problema 4. (23 de puncte)**

Se spune că un triplet  $T = (a, b, c)$  de numere complexe cu  $abc \neq 0$  are proprietatea (P)

dacă  $a + b + c = 0$  și  $|a| = |b| = |c|$ .

(a) Arătați că există cel puțin un triplet  $T$  care are proprietatea (P).

(b) Demonstrați că, dacă un triplet  $T$  are proprietatea (P), atunci  $ab + bc + ca = 0$ , iar imaginile geometrice ale numerelor  $a, b, c$  sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Subiecte selectate de prof. Nicolae Stăniloiu și prof. Lucian Dragomir